Der Beitrag der Mathematik und des Mathematikunterrichts zur Persönlichkeitsbildung

von Hans-Christian REICHEL und Robert RESEL, Univ. Wien

Abstract (The contribution of mathematics for the development of the individual)

Every subject taught at school improves according to its typical demands, particular attitudes, ways of thinking and characteristics of the individual just to name some traits. On the other hand the success and the "favour" for this very subject is promoted by these attitudes, ways of thinking and individual. (Casually and not scientifically called abilities)

Most of all mathematics and mathematics classes create such individual traits and they do so the more the teacher is aware of this fact and orientates his classes accordingly. Straight to the point of the heading of this lecture the problems brought up and theorectical considerations are covered.

1) Zur Legitimationsfrage des Mathematikunterrichts

Welche Erinnerungen drängen sich auf, wenn Sie an Ihren eigenen Mathematikunterricht denken? Welche Gefühle, welche Gedanken haben Sie, wenn Sie das Wort Mathematik hören? Wir sind sicher, dass alle, die niemals außerschulischen Kontakt zur oder mit Mathematik hatten und haben, kaum Positives denken werden. Sicherlich, jeder von uns weiß, dass Mathematik wichtig ist, aber doch verbinden wir alle wahrscheinlich zu allererst Mathematik mit Schule und Unterricht; und wahrscheinlich schwingen auch spezielle Eigenschaften unserer Lehrer mit.

Sicherlich, mathematische Modelle und Methoden finden fast überall Anwendung, angefangen beim sogenannten "täglichen Leben" über das Handwerk, die Finanzwelt bis hin zur Medizin, der Technik, aber auch der Geisteswissenschaften wie etwa die theoretischen Sprachwissenschaften, Musik, Kunst usw. Mathematik ist allgegenwärtig, wenn auch oft verborgen.

Die Anwendungen der Mathematik sind Legion und doch sind sie nicht der einzige (oder gar der wesentliche) Grund dafür, dass Mathematik auf der ganzen Welt seit jeher und in allen Klassenstufen unterrichtet wird; dass eben gerade Arithmetik und Geometrie seit der Antike zu den "artes liberales" gehören, zum Fundament der sogenannten "Bildung" also. Offenbar war und ist man überall und immer der Meinung, dass der Mathematikunterricht in ganz spezifischer aber wichtiger Weise zur Erziehung und zum vollen Mênsch-Sein beiträgt. Insbesondere zu unserer *Persönlichkeit* also, d.h. zum Ganzen der das Wesen einer Person ausmachenden Eigenschaften und Denkweisen, und zwar derjenigen, die für den ganzen Lebenslauf typisch sind und - jedenfalls für längere Zeit - konstant bleiben. Keine vorübergehenden Stimmungen also, keine psychisch bedingten Gemütslagen, keine Charakter-Äußerungen u.ä., vielmehr unsere typischen Haltungen, Sicht- und Denkweisen, die u.a. auch mit dem uns allen vertrauten und doch ein wenig unscharfen Begriff der Allgemeinbildung zu tun haben. Freilich, Mathematik (mathematische Fähigkeiten und Kenntnisse) machen nur einen Teil jener Bildung aus, aber eben doch einen unverzichtbaren, wenn das auch oft verborgen und nur implizit bleibt.

Während zu Beginn der Entwicklung der Mathematikdidaktik als Wissenschaft insbesondere methodische Fragen zur Debatte standen (Natürlich ging es auch um konkrete Inhalte, man denke nur an die von FELIX KLEIN (1849-1925) und durch die Meraner Beschlüsse losgetretene Debatte!), entwickelte sich diese Wissenschaft zu einem großen echt fächerübergreifenden Ressort: von pädagogischen Fragen begonnen über psychologische, soziologische[1], wissenschaftstheoretische über punktuelle didaktische Analysen begrenzter Stoffgebiete ("Stoffdidaktik") bis hin zu dem großen Komplex der empirischen Unterrichtsforschung. Nicht zuletzt durch die bekannten internationalen Untersuchungen über Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten junger Menschen (PISA, TIMSS, ...) stehen heute auch *Legitimationsfragen* im Vordergrund der Forschung (so etwa im Bereich der *Geometrie* derzeit von LUTZ FÜHRER u.a.).

Zur Diskussion derartiger Fragen muss man mindestens eine grundsätzliche Ebene, einen "Horizont" wählen. Diesbezüglich denkbare Ebenen wären:

- Praktische Verwendbarkeit und Einsatz der Mathematik im täglichen Leben: Unter diesem Gesichtspunkt stellen sich vor allem inhaltliche- und Methodenfragen und es läßt sich natürlich darüber diskutieren, wie viele Jahre man unterrichten soll u.a.m.

- Ein ganz andere Ebene eröffnet sich, wenn man darüber diskutieren will, ob die Schule möglichst viele der bestehenden "Welten" widerspiegeln soll. Die Welt der Mathematik existiert schlicht und einfach rund 2500 Jahre, und sie existiert neben anderen Welten wie jener der Biologie, der Geschichte, der Chemie, der Physik, der Musik, der Kunst, der Literatur usw.

---

[1] Vgl. hiezu auch [2]!

(Wahrscheinlich aus historischen Grunden werden in der derzeit bestehenden Schule nicht alle Welten widergespiegelt, zum Beispiel kaum die der Medizin, der Wirtschaft und Börsen usw.)

- Eine dritte Ebene ergibt sich aus der gerade heute sehr aktuellen Frage der "Bildung". Was immer man darunter auch verstehen mag, geht es letzlich wohl immer darum, den eigenen Standpunkt in der "Welt" bestimmen zu können, ihn einordnen und aktiv mitwirken zu können. Ob und inwieweit Teile der Mathematik zur sogenannten Bildung gehören, inwieweit Bildung auf das Leben vorbereitet und Bildung in der Schule überhaupt vermittelt werden soll, ist eine Frage, die andernorts diskutiert werden muss (vgl. [3] u.a.!).
- Eine wieder andere Ebene (auf der naturgemäß anders argumentiert werden muss) erkennt man, wenn man bedenkt, dass Mathematik als solche und ein jahrelanger Mathematikunterricht sich auf den Charakter, die Persönlichkeit des Menschen auswirkt.

Und *dazu* (über den Beitrag der Mathematik und des Mathematikunterrichts zur Persönlichkeit des Menschen) wollen wir hier einige wenige Aspekte ausleuchten. Das Thema ist also nicht fachmathematischer Art, aber dennoch fachgebunden und fachspezifisch.
Ohne der Reihenfolge besondere Beachtung zu schenken, haben wir hier einige Punkte notiert und werden sie gegebenenfalls durch Beispiele belegen.

2) Thesen und Beispiele zum Thema

Jedes Fach trägt in fachspezifischer Weise zur Persönlichkeitsbildung bei, ob wir das im Unterricht beabsichtigen oder nicht. Ob wir Lehrer bewusst daran arbeiten oder nicht. Jedes Fach vermittelt gewisse Haltungen, Sicht-, Sprach- und Denkweisen (THOMAS KUHN (1922-1996) würde wahrscheinlich von *Paradigmen* sprechen.).

Das sind Frames, gewisse Vorgaben und Denkrahmen, innerhalb derer unsere Probleme gesehen. bzw. bearbeitet werden. Ob es AIDS ist, allgemeiner das Sexualverhalten, das Klima-Problem, die Globalisierung oder irgendein persönliches Problem, immer kann man es zum Beispiel *historisch* sehen, *juridisch*, *biologisch*, *religiös*, *anthropologisch* u.ä. oder eben durch die "Brille" der *Statistik* und *Mathematik*. Immer handelt es sich um gewisse Denk- und Begriffsrahmen, um "Abstraktionsstufen" wie man sagt, innerhalb derer wir denken und urteilen. Erst das Zusammenwirken dieser "Brillen" macht Allgemeinbildung aus (Daher auch die Vielfalt der Unterrichtsgegenstände im Fächerkanon!).

Allein durch das Einbringen von Größen und Variablen, von Zahlen, Gleichungen, grafischen Darstellungen usw. wird die Sache selbst wie die eigene Haltung dazu beeinflusst. Messen und Messbarkeit als solche, grafische Darstellungen und vor allem das funktionale Denken[2] ist fachtypisch und prägend für unsere Weltsicht. Funktionales Denken heißt, dass Prozesse und Situationen durch messbare Größen beschrieben werden, die in einem gewissen funktionellen Zusammenhang stehen.

Ferner ist es auch der Ausschluss persönlicher Befindlichkeiten und die Beschränkung auf logisch-formale Vorgangsweisen, man könnte von "rationaler Distanz" sprechen, von - hoch gesprochen - Theoriebewusstsein, wodurch die Mathematik persönlichkeitsbildend wirkt.

So "quasi *zwischen den Zeilen*" wird im MU das sogenannte "strenge" *gesetzmäßige Denken* als schlagkräftiger und - fast möchten wir sagen - "besser" erlebt als zum Beispiel das assoziative, emotionale, historische Denken oder das sozusagen als "volkstümlich" empfundene.

Abstraktion und *Idealisierungen* sind das tägliche Leben der Mathematik und *dadurch* wirkt sie auf den Menschen! Denken Sie nur daran, wie schon ab der fünften Schulstufe Gegenstände des täglichen Lebens wie Möbel, Grundstücke usw. als ideale geometrische Figuren und Körper aufgefasst und berechnet werden[3]. Später werden Größen wie Benzinverbrauch, die Zeit als solche, Bakterienanzahlen, das Alter von Lebewesen usw. als Variable in Formeln und Funktionstermen gesehen. Selbst Schwankungen und andere Unsicherheiten werden in *statistische Gesetze* gepresst. All das kann - bei aller Sinnhaftigkeit und bei allem Erfolg (und eigentlich gerade deswegen!) - nicht ohne Auswirkungen auf das *Weltbild* der Schüler bleiben, das ja zweifellos zu ihrer Persönlichkeit gehört (umso mehr nochmals, da diesen Sichtweisen eben oft der technische und praktische Erfolg nicht abgesprochen werden kann). Selbst in Musik und Kunst werden seit jeher mathematische Gesetze und Muster gesucht und gefunden, wenngleich das dann dort doch oft nicht als das "wirklich Adäquate" gelten kann.

All das bisher Angeführte gilt natürlich letztlich für alle Naturwissenschaften, wenn auch jeweils ein bißchen anders.

---

[2] Näheres dazu entnehme man [5]!
[3] Vgl. hiezu auch [4]!

Die Mathematik aber besitzt einen *strukturtheoretischen* und einen *algorithmischen* Wesenszug. Beides trägt in spezifischer Weise zu unserer Auseinandersetzung mit der realen Welt und zum "Verständnis" derselben bei. Immer versuchen wir, vorgegebene Situationen zu strukturieren, ihnen Muster aufzuprägen und sie durch das abstrakte Studium dieser Strukturen und Muster zu verstehen, Vorhersagen machen zu können und Gegebenheiten zu erklären. *Gleichzeitig* wollen wir auch *verändern*, operieren, Modelle bilden, Probleme lösen, auch argumentieren können wir erst, nachdem wir Strukturen erkannt und Variable benannt haben.

Im MU lernt man nicht Denken schlechthin, man lernt, an Probleme in einer gewissen Art und Weise heranzugehen, die – wenn sie angemessen sind – Vorteile gegenüber anderen Strategien haben.

Bei zahlreichen außermathematischen Problemen ist genau das der Fall. Dies ist dann wohl auch der Grund, warum immer mehr Firmen, Berufsgruppen und Wissenschaften erkennen, dass Mathematik und Mathematiker für sie wichtig sind (Firmen wie AT&T, Microsoft, Hewlett Packard, Siemens, Daimler-Chrysler, Volkswagen, Banken, Medizinische Forschungseinrichtungen, etc. stellen Mathematiker ein und besitzen Mathematikabteilungen.).

Das bisher Angesprochene, wie alles Folgende, sind in Wahrheit genuin mathematikdidaktische Themen und Beiträge, doch wollen wir es von nun an mit kursorischen Bemerkungen bewenden lassen, um den Rahmen nicht zu sprengen.

Es gehört zum Beispiel zur Persönlichkeit des Menschen - bewusst oder unbewusst - , eine Vorstellung darüber zu haben, ob die Logik oder die Welt schlechthin unabhängig vom Menschen existiert, von ihm also *entdeckt* wurde, oder ob sie von ihm *erschaffen* wurde, wie es zum Beispiel die Evolutionäre Erkenntnistheorie nahelegen würde.

Durch die Art des Umganges mit Mathematik werden hier schon bei Jugendlichen bleibende Entscheidungen getroffen. Von PLATO begonnen, bis POPPER oder WITTGENSTEIN, haben die meisten Philosophen zur Rolle der Mathematik für die Persönlichkeitsbildung Stellung genommen. Ob - einfach gesagt - Zahlen, geometrische Figuren und Ideen schlechthin vom Menschen unabhängig existieren und untersucht werden, oder ob, wie es dem Konstruktivismus entspräche, die Mathematik all diese Dinge erst geschickt erschafft; ob also $2+2=4$ ist oder ob die Zahlen 2 und 4 erst so geschaffen wurden.

All das ist keineswegs von geringem Interesse, Entscheidungen darüber fallen vor allem auch im Mathematikunterricht und wirken sich - bewusst oder unbewusst - auf die Persönlichkeit des Menschen aus.

Für alle Gläubigen zum Beispiel existiert Gott unabhängig von der Welt, alle sprachlichen Aussagen über Gott sind sozusagen Gleichnisse. Nach IMMANUEL KANT hingegen ist Gott ein Begriff der *praktischen Vernunft*, für manche Wissenschaftler ist - schwächer noch - Gott einfach ein geschickter Hilfsbegriff, fur Atheisten einfach Unsinn.

Interessanterweise haben selbst bei derartigen Problemen die Mathematik und der Mathematikunterricht die Hand im Spiel, praktisch alle Philosophen haben dies erkannt und sich hiezu mehr oder weniger explizit geäußert[4]. Der Mathematikunterricht könnte Grundlagen sowohl für ein sozusagen "platonisch-idealistisches" wie für ein positivistisches Weltbild legen. Hier ist die Persönlichkeit des Lehrers/der Lehrerin zumindest indirekt wirksam.

Auch die belletristische Literatur bildet viele Beispiele für Wechselwirkungen zwischen Mensch und Mathematik (z.B. ROBERT MUSIL, HERMANN HESSE u.v.a., siehe [9]).

Bevor wir nun zu den weiteren Punkten unseres Aufsatzes kommen, sei ein kurzes *Beispiel* angeführt, welches das Prinzip der sogenannten Angewandten Mathematik (schon mit Mitteln der 2. Klasse) zeigt, nämlich die (wenn hier auch einfache) fachtypische Herangehensweise der Mathematik an außermathematische Probleme:

Beispiel: 1960 kamen auf einen Professor rund 20 Studierende. Seither stieg die Anzahl der Professoren um 45%, die der Studierenden um das Dreifache. – Wie ist das Verhältnis heute?

1. Schritt: Übersetzung des Problems in die Sprache der Mathematik.
P: Anzahl der Professoren, S: Anzahl der Studierenden.

$$1960: \quad P:S = 1:20 \ \left(\frac{P}{S} = \frac{1}{20}\right) \qquad 2001: \quad \frac{1{,}45 \cdot P}{3 \cdot S} = ?$$

2. Schritt: Bearbeitung des nun in der Sprache der Mathematik gestellten Problems:

$$\frac{145}{300} \cdot \frac{P}{S} = \frac{145}{300} \cdot \frac{1}{20} = \frac{7{,}25}{300} \approx \frac{1}{40} \quad \Rightarrow \quad P_{2001} : S_{2001} \approx \frac{1}{40}$$

3. Schritt: Rückübersetzung.
Auf einen Professor kommen rund doppelt so viel Studenten als 1960.

[4] Vgl. [10] und [11]!

Dieses inhaltlich triviale Beispiel zeigt genau, *wie* Mathematik angewandt wird; *wie* sie an die Welt, besser: an außermathematische Probleme herangeht und sie oft löst.

Genau diese drei Schritte sollte man als Lehrer immer wieder, d.h. bei *allen* Textaufgaben verdeutlichen und betonen!

Dies ist zwar offenbar ein rein methodischer Hinweis, er zeigt aber ganz deutlich, wie Mathematiker denken und wie sich der Mathematikunterricht auf die Persönlichkeit auswirken kann. Ein sozusagen normaler Mensch würde hier nicht in Variablen denken, sondern einfach im Internet nachsehen oder im Ministerium anrufen.

In der Mathematik werden Probleme also gelöst, indem man sie in ihre Sprache übersetzt und dort mit im voraus gelernten Methoden und Theorien löst und "wie eine Krankheit" behandelt, wie es LUDWIG WITTGENSTEIN einmal formuliert hat.

In allen jahrelang im MU "gepflegten" Text- und Anwendungsaufgaben werden wie gesagt Größen und Begriffe des täglichen Lebens oft als Variable und als Unbekannte in Formeln und Gleichungen gesehen. Jedenfalls scheint das *Berechenbare* an ihnen das eigentlich *Nützliche* und *Sinnvolle* zu sein (ob dies auch jeweils angemessen ist, kommt seltener zur Sprache, von Dingen, die sich diesem Schema nicht unterordnen lassen, ist einfach nicht die Rede). Dies immer wieder zu erleben übt natürlich eine gewisse Prägung aus, umsomehr, da diese Vorgehensweise ja sehr oft erfolgreich ist.

Nun aber weiter in unserer Liste. – Bisher haben wir:

- Eigenschaften und Vorgänge durch messbare Größen und Variable erfassen, Messbarkeit als solche
- Rationale Distanz und Theoriebewusstsein
- Ist die Welt (Logik, Mathematik, ...) entdeckt oder erschaffen? Erforscht oder konstruiert?
- Spezifische Herangehensweise an Probleme (vgl. letztes Beispiel!)

Als nächstes ein besonders wichtiger und vielgestaltiger Aspekt:

3) Zur Rolle der Mathematik beim Bilden von Begriffen und Vorstellungen

Wie entstehen unsere Begriffe, wie sehr ist dieser (für jeden Menschen wichtige) Prozess von der Mathematik beeinflusst?

Man bildet dort nämich oft Begriffe durch schrittweises Exaktifizieren umgangssprachlicher Ausdrücke.

Hiezu ein

Beispiel: "Wo liegt die Mitte eines Dreiecks?"

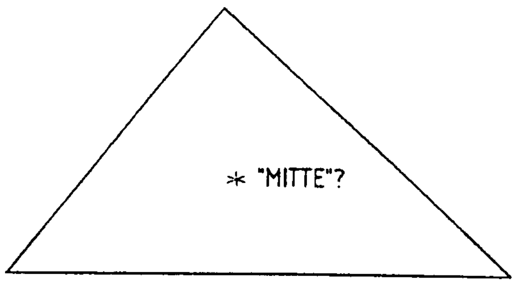


Fig. 1a

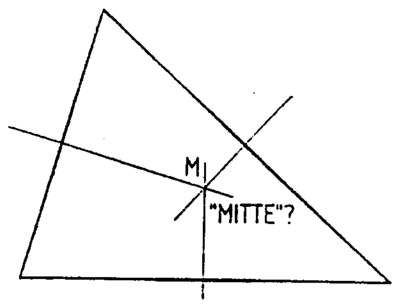


Fig. 1b

Man wird sagen: die Mitte muss von allen drei Eckpunkten gleich weit entfernt sein. Somit wäre der Umkreismittelpunkt U ein Kandidat (Fig. 1a und Fig. 1b). Leider kann U aber - wie Beispiele zeigen - auch außerhalb des Dreiecks liegen.

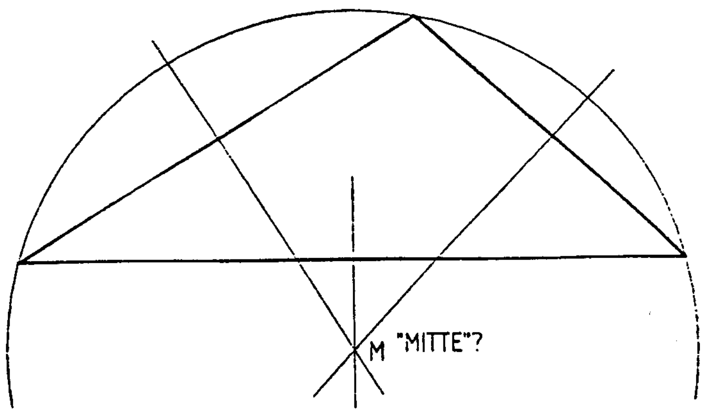


Fig. 2

Dieser Kandidat kommt also nicht als Antwort nach der "Mitte" in Frage (Fig. 2).

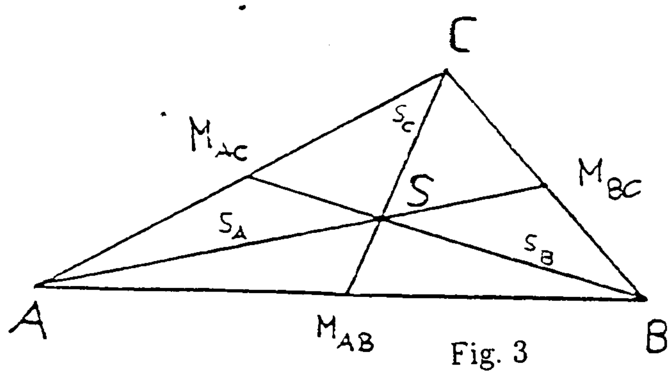


Fig. 3

Versuchen wir es also mit dem Schwerpunkt (Fig. 3) u.s.w.

Gemeint ist hier die schrittweise Begriffsbildung durch Abgleichung und Hebung auf andere - vielleicht höhere - Exaktheitsstufen und mögliche Veränderungen dadurch.

Ein zweites Beispiel, das vielleicht noch deutlicher zeigt, welche Art zu denken hier typisch für die Mathematik ist:

Beispiel (4. Klasse)[5]: Christa schätzt von einem Punkt im Gelände die Breite eines Flusses auf 40m. Der Fluss ist aber an dieser Stelle 50m breit. Ralph schätzt die Entfernung Kirche–Schloss (→ Fig. 4) auf 200m. Die tatsächliche Entfernung beträgt jedoch 180m. Wer hat *"besser"* geschätzt?

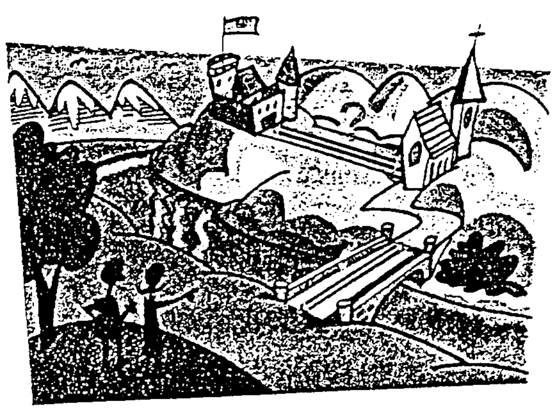


Fig. 4

[5]aus [13]

Die Antwort gibt der *relative Fehler*, nicht der absolute. Man sieht hier ganz deutlich das Typische: der Begriff "besser" wurde hier durch *Exaktifizierung* (refinement, wie man englisch sagt) auf eine - sagen wir - höhere Exaktifizierungsebene gehoben ("Relativer" Fehler). Dadurch *gewinnt* der zunächst unscharfe Vorstellungsinhalt, dass er - mittlerweile scharf begrenzt ("definiert") (Fig. 5) - nun besser argumentiert und "bearbeitet" werden kann.

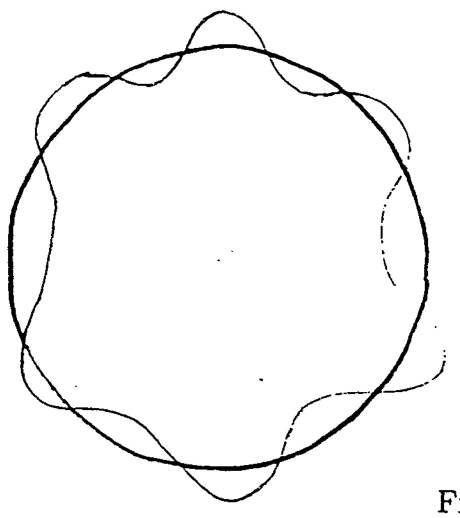


Fig. 5

Er *verliert* allerdings gewisse Inhalte, die vorher mehr oder minder bedenkenlos im ursprünglichen Wort enthalten waren. Das Wort "besser" war vorher wenn auch unscharf doch "umfassender" als das Wort "Relativer Fehler".

Es war niemand Geringerer als ALBERT EINSTEIN, der gelegentlich "The Whole Of Science is nothing else than refinement of everyday life." sagte.

So an Begriffe wie zum Beispiel "Gerechtigkeit", "Mensch", "Kultur", "Kunst" u.a. heranzugehen ist Teil der Persönlichkeit eines Menschen und wird vom Mathematikunterricht in gewisser Weise angeregt. Mathematiker werden nämlich auch dort genau das tun!

GOETHE bezeichnet (in den "Reflexionen und Maximen") gelegentlich die Mathematiker als "eine Art Franzosen", die - "spricht man zu ihnen - es in ihre Sprache übersetzen, und es ist alsbald etwas ganz anderes".

Das Denken erfolgt im MU in *definierten* Begriffen. Definitionen als *Voraussetzung* für das Argumentieren sind entscheidend. Die Sprache und das Sprechen spielen im MU daher ein ganz besondere Rolle. Definitionen sind für das Denken und das Sprechen wichtig, sie können aber auch einengen. Jedenfalls wirken die Mathematik und der Mathematikunterricht auch auf unsere persönliche Alltagssprache und sogar noch weit darüber hinaus.

So schreibt etwa die Mathematikerin und Philosophin EVA-MARIA FEICHTNER, Professorin an der ETH Zürich, in [18], dass sie gerade durch die Beschäftigung mit Mathematik philosophische Texte verständig handhaben konnte. Ihrer durch die Mathematik geschulten Persönlichkeit waren und sind auch schwierigere Philosophien leichter zugänglich. So z.B. die Philosophie MARTIN HEIDEGGERS, einem der großen Philosophen des 20. Jahrhunderts. Sie sagt: "Ich bin da mit einer sehr strukturellen, sagen wir mathematischen, Herangehensweise sehr gut gefahren. Ich war es aus der Mathematik gewohnt, mit Definitionen umzugehen. Und aus der Art, wie Heidegger einen Begriff verwendet und wie er ihn in Bezug setzt zu anderen Begriffen, die er benutzt, habe ich seine Definition verstehen gelernt oder mir meine eigene zusammengebastelt und konnte mich dann in diesem System aus Definitionen sehr gut bewegen."

In seinem Hauptwerk "Sein und Zeit" geht es Heidegger um die Begriffsbildung der Frage, was Fragen eigentlich bedeutet. Dazu schreibt er ganz kurz und knapp: "Jedes Fragen ist ein Suchen." Und weiter im Text heißt es: "Und das Gefragte, das Gesuchte muss irgendwo vorgängig vorhanden sein."

Für die Mathematikerin Feichtner heißt dies: "Ich kann die Frage nicht ins Leere stellen, sondern die Übersetzung in dem Begriff 'suchen' impliziert eigentlich schon viel mehr als das Wort 'fragen', nämlich, dass da auch etwas ist, was ich suche. Das ist mir hängengeblieben und ich denke, das spielt auch in der Mathematik eine große Rolle. Gute Fragen zu formulieren heißt, im Prinzip schon die Antworten zu erahnen, sonst werden die Fragen irgendwo in der Luft hängenbleiben oder richtungslos sein."

Wir erkennen ganz deutlich, was wir ohnehin wissen: Mathematisch beschulte Menschen bringen ganz allgemein der Philosophie (vielleicht sogar der Theologie) oft größere Liebe und größeres Verständnis entgegen. Wenn das nicht Ausdruck der Persönlichkeit ist!

4) Weitere Gesichtspunkte

Zweifelsohne also beeinflussen die Mathematik und der Mathematikunterricht unser *Sprachbewusstsein*, und dies gleich in zweierlei Hinsicht:
Es gibt einerseits Förderung sprachlicher Fähigkeiten durch Mathematik und andererseits Förderung mathematischer Fähigkeiten durch Sprachschulung (Beispiele hiezu dürfen wir hier wohl als bekannt voraussetzen, ferner verweisen wir auf [7] und [12].).

In seinem Dialog "Der Staat" beschreibt PLATO, wie künftige Politiker ausgebildet werden sollten. Dabei fordert er speziell Arithmetik und Geometrie und sagt in etwa "Denn sollten sie auch sonst nichts davon haben, dann zumindest dies, dass ihre Sprache und ihr Ausdrucksvermögen besser werden.".

Ein weiterer Punkt, der hierher gehört, wäre:

- Die Haltung, der Stellenwert, die bzw. den man sogenannten "Expertenmeinungen" entgegenbringt

Hiezu wieder ein

Beispiel (8. Klasse)[6]: Für eine lebensbedrohende Krankheit gab es bisher nur das Heilmittel A, das allerdings nur mit der Wahrscheinlichkeit $p_A = 0,5$ das Leben retten konnte. Ein neues Heilmittel B wurde entwickelt. Um es zu testen, wurde es an 130 Patienten auf freiwilliger Basis erprobt. Von den 130 Patienten starben 50 (Es wurden also 80 geheilt). Das neue Medikament scheint also besser zu wirken. Dürfen wir - wenn wir für eine Entscheidung eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% zulassen - aufgrund dieser Stichprobe zustimmen? Wie ist es, wenn wir nur eine 1%ige Irrtumswahrscheinlichkeit zulassen? (Schlüsse aus Stichproben sind natürlich immer nur mit gewissen "Irrtumswahrscheinlichkeiten" möglich.)

Der persönlichkeitsbildende Beitrag dabei besteht hier weniger in der Art der Durchführung oder gar in der Lösung. Vielmehr sollte man sich fragen: was bedeutet eigentlich *statistisches Testen*; wie macht man es, aber mehr: was genau weiß man dann? Welchen Behauptungen kann man zustimmen, welche Behauptungen kann man ablehnen, mit welcher *Irrtumswahrscheinlichkeit* (*Sicherheitswahrscheinlichkeit*)? Was bedeuten diese Worte überhaupt?

Ziel ist letztlich, wie ROLAND FISCHER sagt, die Fähigkeit, mit Experten kommunizieren zu können bzw.: sich aus Zeitungsmeldungen ein Urteil bilden zu können, einen bestimmten vielleicht sogar *kritischen* Blick auf Studienergebnisse aller Art zu entwickeln.

Es mag scheinbar ein Paradoxon sein und doch ist es so: das Praktische in der Mathematik liegt eben gerade in ihrer Abstraktheit.

Dies Jahre lang immer wieder zu erleben, trägt natürlich zur Persönlichkeitsbildung bei.

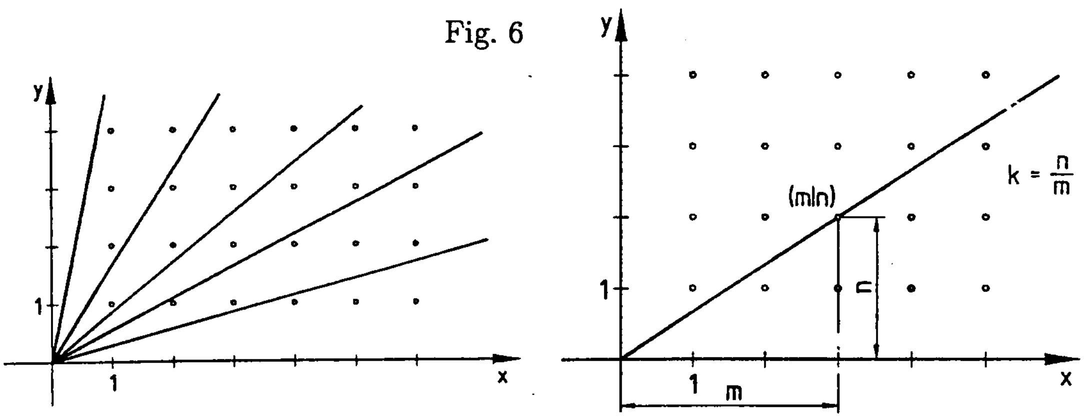
Weitere — teilweise von uns bereits erwähnte — Punkte wären:

- Das Denken im Mathematikunterricht erfolgt *regelhaft* (rational), nicht etwa assoziativ o.a., jedenfalls aber unter Ausschluss persönlicher Befindlichkeiten.
- Die Mathematik lehrt nicht Denken schlechthin, sie lehrt nur, dass für gewisse Probleme gewisse Methoden zielführend sind.
- Jede Art von *Argumentation* ist erst möglich, nachdem Begriffe *definiert* wurden. Für einen mathematisch beschulten Menschen spielen Definitionen eine wichtigere Rolle als für einen Nicht-Mathematiker.

[6] aus [15]

- vollständiges Denken, Fallunterscheidungen
- Umgang mit Fehlern[7]
- Die Überprüfbarkeit eigenen Tuns (sofortiges Erleben von Erfolgen und Misserfolgen, von wahr und falsch, von Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit eines Gedankengangs: Rolle des Lösungsheftes zu einem Buch)
- Erleben eigener Leistungen (Leistungsfähigkeit, Grenzen; Steigerung und Nachlassen) wird vor allem im Mathematikunterricht deutlich
- Freude an eigenen Ergebnissen (z.B. bei Aufgaben der konstruktiven Geometrie oder beim PC-Einsatz) und Freude an eigener Leistung abseits von Glücks- und Zufallstreffern
- Die Fähigkeit zum **Staunen**[8], hiezu ein Beispiel:

Fig. 6



Anhand von Fig. 6 fragen wir, ob es Gerade durch den Koordinatenursprung gibt, welche *keinen einzigen Gitterpunkt* enthalten, bis "in alle Ewigkeit", also auch dort, wo jede Zeichnung versagen muss. Erstaunlicherweise tun dies genau jene Geraden mit irrationaler Steigung, also zum Beispiel $\sqrt{2}$. Es gibt sogar viel mehr solche Geraden, da $\mathbb{Q}$ abzählbar und $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ überzählbar ist.

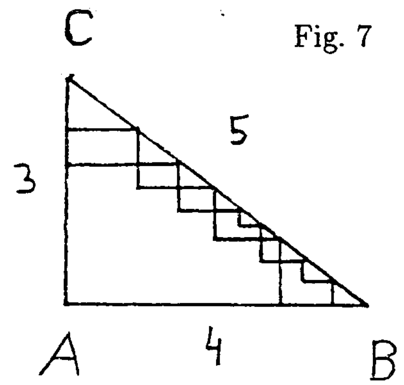
- Freude am Verstehen und Freude an "Einsicht" schlechthin (MARTIN WAGENSCHEIN sagt sogar "Verstehen ist Menschenrecht."!)
- Die Kraft des Formalen (FRITZ SCHWEIGER) erleben und die Kraft des Abstrakten

[7]Vgl. hiezu auch [1], [8] und [17]!
[8]Staunen zu können ist ein Merkmal der Persönlichkeit und Bildung.

Je mehr sich Lehrende vor Augen halten, dass und vor allem wie sich der MU persönlichkeitsbildend auf die SchülerInnen auswirkt, desto mehr können letztere fördernd oder hemmend einwirken und damit deren eigene Persönlichkeit einbringen. Tun sie dies nicht , wird der MU per se wirken. Dann aber müssen wir – wie wir wissen – auch mit negativen Einflüssen rechnen (An dieser Stelle sei auch die kurze Bemerkung angebracht, dass der MU freilich auch eher schädliche Einflüsse auf die Persönlichkeitsentwicklung haben kann. Man denke zum Beispiel an fortgesetze Frustrationen, die von der Lehrerin / dem Lehrer nicht "richtig" aufgefangen werden!).

- Zwei unter vielen ähnlichen Beispielen mögen schließlich noch zeigen, wie sich die Mathematik auf das Kritikbewusstsein und die *Kritikfähigkeit* eines Menschen auswirken kann:

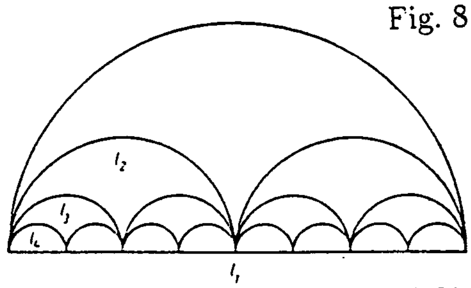
Fig. 7



Egal, durch wie viele Zickzacklinien (wie im Dreieck in Fig. 7 angedeutet!) man vom Punkt C zum Punkt B gelangt, die Gesamtlänge beträgt *unabhängig von der Anzahl der Ecken des Weges* (was wesentlich - von den SchülerInnen zu erkennen und argumentieren - ist!) stets $4+3=7$. Geht die Anzahl der Zickzacklinien schließlich gegen ∞, entspricht der "Grenzweg" aber gerade der Dreieckkseite von C nach B, welche die Länge 5 hat. Somit ist also $5=7$?

Ein ähnlich gelagertes (und deshalb im Folgenden nicht mehr kommentiertes) Beispiel[9] ist der durch Fig. 8 illustrierte "Beweis" der "Gleichung" $\pi = 2$ (aus [14]).

Fig. 8



Gerade im MU lernt man, dass man sich nicht ohne weiteres auf die Anschauung oder gar die Intuition verlassen kann. Ein mathematisch beschulter Mensch mag dies dann auch anderswo tun.

Nicht etwa, dass Mathematik gegenüber anderen Fächern superior wäre, aber dass Mathematik in der Schule auch anders gesehen werden kann als es oft getan wird (als langweiliger und ungeliebter Gegenstand nämlich), dies wollten wir mit unserem Aufsatz (wieder) in Erinnerung rufen, denn Mathematik kann spannend und herausfordernd sein: ein Gedankengebäude mitten "in der Welt" und mit allem verbunden!

Anschrift der Verfasser:

Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans-Christian Reichel

Mag. Dr. Robert Resel

Institut für Mathematik der Universität Wien
Strudlhofgasse 4
A-1090 Wien

[9] Für Interessierte: Der Klassiker [6] enthält 101 derartige (nicht nur aus der Geometrie stammende) Trugschlüsse!

Literatur:

1. FISCHER, Roland und Günther MALLE (1985): Mensch und Mathematik. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim.
2. HEINTZ, Bettina (2000): Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Springer, Wien/New York.
3. HENTIG, Hartmut v. (1996): Bildung. Verlag Hanser, München.
4. KRAINER, Konrad (1982): Umwelterschließung im Geometrieunterricht. Diplomarbeit an der Universität Klagenfurt.
5. KRÜGER, Katja (1999): Erziehung zum funktionalen Denken. Logos Verlag, Berlin.
6. LIETZMANN, Walter (1923, 3. Aufl.): Trugschlüsse. Teubner, Leipzig.
7. MAIER, Hermann und Fritz SCHWEIGER (1999): Mathematik und Sprache. öbv&hpt, Wien.
8. MALLE, Günther (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig.
9. RADBRUCH, Knut (1989): Mathematik in den Geisteswissenschaften. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.
10. REICHEL, Hans-Christian (1990): Mathematik als Paradigma und Propädeutik der Philosophie. In: Mathematische Semesterberichte 37, S. 180-215.
11. REICHEL, Hans-Christian und Enrique PRAT DE LA RIBA (Hrsg.) (1992): Naturwissenschaft und Weltbild. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.
12. REICHEL, Hans-Christian (1998): Neuansätze und eine andere Sichtweise des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 98/5, S. 152-160.
13. REICHEL, Hans-Christian, Dieter LITSCHAUER und Herbert GROSS (1998, 5. Aufl.): Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung 4. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.
14. REICHEL, Hans-Christian, Robert MÜLLER, Josef LAUB und Günter HANISCH (1999, 4. Aufl.): Lehrbuch der Mathematik 6. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.
15. REICHEL, Hans-Christian, Robert MÜLLER und Günter HANISCH (1999, 3. Aufl.): Lehrbuch der Mathematik 8. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.
16. REICHEL, Hans-Christian und Tomas KUBELIK (2001): Außermathematische Anwendungen der Mathematik. In: a) "Mathematik – unsichtbar, doch allgegenwärtig", Reihe: Bildungsraum Schule (herausgegeben von H. KÖHLER und K. RÖTTEL). Polygon Verlag, Eichstätt (preprint).
b) http://www.oebvhpt.at/mathematik/rm/
17. RESEL, Robert (2001): Didaktisch-methodische Überlegungen zu ausgewählten Kapiteln des Geometrieunterrichts der AHS-Oberstufe. Dissertation an der Universität Wien.
18. WÜSTHOLZ, Gisbert (Hrsg.) (2001): Mathematik - das geistige Auge. ETH Zürich.